

Problème 416 – Le jour du dépassement

Niveaux : 2 versions : Quatrième/Terminale (Option Maths Complémentaires)

Chapitres : Tableur, Proportionnalité (Quatrième)

Statistiques à deux variables (Terminale)

Inédit, publié le 06/11/2023



Proposé chaque année par l'ONG américaine Global Footprint Network, l'indicateur du jour de dépassement nous donne une représentation simple et parlante du jour de l'année à partir duquel les êtres humains ont consommé l'ensemble des ressources naturelles que la Terre produit pour se régénérer. Quand nous passons cette date, on peut dire que nous avons consommé plus que ce que la Terre peut donner, et donc que nous l'épuisons. Malheureusement, la date n'a quasiment pas cessé d'avancer d'année en année depuis les années 1960, au point d'atteindre en 2023 le 2 août. Et rien ne semble inverser la tendance, comme nous allons le voir dans ce problème.

Le calcul de ce jour de dépassement se base sur la formule⁽¹⁾ :

$$J = 365 \times \frac{B}{E} \text{ avec } \begin{cases} J : \text{valeur associée au jour de dépassement} \\ B : \text{biocapacité de la planète (en gigahectare global – GHag)} \\ E : \text{empreinte écologique de l'humanité (en gigahectare global – GHag)} \end{cases}$$

On arrondit à l'unité par **excès** la valeur de J pour avoir la date du calendrier correspondante. Par exemple, en 1970, on trouvait $J \approx 364,11$, soit un arrondi par excès égal à 365. La date du dépassement cette année-là était donc le 365^{ème} jour de l'année, donc le 31 Décembre 1970. Remarquons que cette date est toujours calculée sur un calendrier de 365 jours, en ignorant qu'il y ait ou non un 29 Février.

On fournit pour ce problème le fichier de données donnant la biocapacité de la planète B et l'empreinte écologique de l'humanité E , chaque année depuis 1970 jusqu'à 2021 (fichier « 416 – Données.xlsx »)⁽²⁾.

(1) Source : <https://www.overshootday.org/newsroom/past-earth-overshoot-days/>

(2) Source : https://data.footprintnetwork.org/?_ga=2.169727202.2112131915.1699100435-831032639.1699100435#/countryTrends?cn=5001&type=BCtot,EFctot

Les deux problèmes proposés sont totalement indépendants (même s'ils partagent l'utilisation du fichier de données).

Niveau Quatrième

1) a) A l'aide des données fournies par le fichier « 416 - Données.xlsx » sur l'onglet « Données », calculer directement la valeur de J , arrondie au centième près, en 1980, en 1990, en 2000, en 2010, et en 2020.

b) En déduire les dates du dépassement pour chacune de ces années. Que constate-t-on sur la tendance globale entre 1970 et 2010?

c) Quel évènement peut expliquer la valeur obtenue pour 2020 ?

2) On veut obtenir directement dans le fichier de données, en colonne D, la valeur de J , arrondie à l'unité par excès.

Dans un tableur, la fonction « ARRONDI.SUP(nombre;0) » (ou ROUNDUP en anglais) permet d'obtenir la valeur arrondie d'un nombre par excès (le 0 permet d'obtenir cet arrondi à l'unité près).

Quelle formule doit-on entrer en cellule D2 avant de l'étirer verticalement pour obtenir les valeurs de J pour toutes les autres années, arrondies à l'unité par excès ?

3) En 2022, le jour du dépassement était le 1^{er} août, soit le 214^{ème} jour de l'année. Cette année-là, la Terre a eu une biocapacité d'environ 12,04 GHag.

a) Entre quelles valeurs pouvait se situer la valeur de J en 2022?

b) En déduire, en GHag, entre quelles valeurs pouvait se situer l'empreinte écologique de l'humanité E cette année-là.

4) « Au rythme où nous allons, si nous continuons ainsi, un jour, nous consommerons l'équivalent de 2 Terres en une seule année ».

Cette année-là, quel sera le jour du dépassement ?

Niveau Terminale (Maths complémentaires)

En **Annexe**, on a représenté sur un graphique les valeurs de E et B entre 1970 et 2021, en utilisant les valeurs issues du fichier « 416 – Données.xlsx ». On y ajouté les droites de régression associées à chaque série de données, avec leurs équations respectives, telles qu'elles sont fournies par le tableur.

1) Visuellement, on voit que l'évolution des valeurs de B en fonction du temps est à peu près affine.

a) Calculer l'équation de la droite passant par les deux points représentant les valeurs de B en 1970 et 2021 (disponibles sur le fichier).

b) Comparer le résultat obtenu à l'équation la droite de régression proposée par le tableur pour la série des valeurs de B .

2) a) Calculer la covariance des séries des années et des valeurs de E .

b) Justifier que l'équation de la droite de régression proposée par le tableur pour les valeurs de E est bien celle que l'on trouve par la méthode des moindres carrés.

Pour les questions suivantes, on extrapole, pour les années après 2021, que les valeurs de E et de B sont fournies par des fonctions affines e et b , celles dont les représentations graphiques sont les droites de régression tracées en **Annexe** (e et b sont des fonctions des années t).

3) Selon cette extrapolation, quelles seront les valeurs de E et de B en 2050 ?

4) On pose $j(t) = 365 \times \frac{b(t)}{e(t)}$.

Justifier que j est une fonction décroissante pour $t \geq 2021$.

5) Quelle serait alors, dans ce modèle, la première année pour laquelle le jour du dépassement serait au plus tard le 1^{er} juillet (le 182^{ème} jour de l'année) ?

Annexe

